نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **پیوستگی**

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۱

شرط پیوستگی تابع f در $x = \frac{\pi}{4}$ آن است که $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = f(\frac{\pi}{4})$ باشد.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cot x-1}{\sin x-\cos x} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}-1}{\sin x-\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\cos x-\sin x}{\sin x}}{\sin x-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-(\sin x-\cos x)}{\sin x(\sin x-\cos x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\sin x}$$

$$= \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \Rightarrow f(\frac{\pi}{4}) = k = -\sqrt{2}$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} (x + \frac{3}{x}) = a + \frac{3}{a}$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} (3x + a) = 4a$$

$$a + \frac{3}{a} = 4a \xrightarrow{\times a} a^2 + 3 = 4a^2 \Rightarrow 3a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm 1$$

اگر $a = 1$ باشد، $f(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{x} & x \geq 1 \\ 3x + 1 & x < 1 \end{cases}$ است که در R پیوسته است.

ولی اگر $a = -1$ باشد، $f(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{x} & x \geq -1 \\ 3x - 1 & x < -1 \end{cases}$ می‌شود که در $x = 0$ پیوسته نیست. پس فقط $a = 1$ قابل قبول است.

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۱

$$a = \lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\pi - x} = \frac{0}{0}$$

صورت و مخرج کسر بالا را در $\sqrt{1-\cos x}$ ضرب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$a = \lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{|\sin x|}{(\pi - x)} \times \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to\pi^+} \frac{-\sin x}{\pi - x} \times \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}$$

برای محاسبه حد بالا قرار می‌دهیم: $\pi - x = t$. بنابراین:

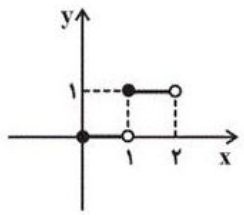
$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin(\pi - t)}{t} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-\sin t}{t} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۱

نمودار تابع گزینه «۱» به صورت زیر است:



تابع رسم شده در تمام نقاط بازه (۱ , ۰) پیوسته است و در $x = 0$ پیوستگی راست دارد، پس در بازه [۰ , ۱) پیوسته است. از طرفی در $x = 1$ پیوستگی چپ ندارد پس در بازه (۰ , ۱] پیوسته نیست.

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

گزینه «۱»: تابع $y = f(x)$ در فاصله $(۰,۲)$ زیر محور xها و منفی است. پس $\sqrt{f(x)}$ در این بازه تعریف نشده است.

گزینه «۲»: تابع $y = \frac{x-۲}{\sqrt{f(x)}}$ در $x = ۲$ از راست پیوسته است. چرا که:

$$y(۲) = \frac{۰}{\sqrt{f(۲)}} = \frac{۰}{\sqrt{۲}} = ۰$$

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{x-۲}{\sqrt{f(x)}} = \frac{۰}{\sqrt{۳}} = ۰$$

به علاوه در تمام نقاط بازه $(۲,۳)$ نیز پیوسته است. پس در فاصله $[۲,۳)$ پیوسته می‌شود.

گزینه «۳»: می‌دانیم $f(۳) = ۰$ است پس تابع $y = \frac{x-۲}{\sqrt{f(x)}}$ در $x = ۳$ تعریف شده نیست.

گزینه «۴»: تابع $f(x)$ در $x = -۳$ از راست پیوسته نیست، درنتیجه $\frac{x-۲}{\sqrt{f(x)}}$ هم در $x = -۳$ پیوستگی راست ندارد و نمی‌تواند در فاصله $[-۳,-۲)$ پیوسته باشد.

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

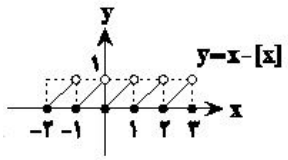
در ابتدا دقت کنید که چون سؤال در مورد عرض نقاط سؤال کرده، اجازه داریم به جای کار با تابع $f(x) = ۵x - [۵x]$ با تابع $y = x - [x]$ کار کنیم.

با توجه به این نمودار، تابع در نقاط صحیح که روی خط $y = ۰$ قرارگرفته‌اند، فقط از راست پیوسته است و لذا: $n = ۰$، پس می‌توان گفت:

$$n - m = ۰ - m = -m$$

حال برای پیدا کردن m، دقت کنید که با توجه به شکل، این تابع در نقاط غیر صحیح از هر دو طرف پیوسته است و در مورد این نقاط می‌توان گفت که روی خط $y = m$ واقع‌اند که $۰ < m < ۱$

بنابراین: $-۱ < -m < ۰$ و تنها گزینه‌ای که در این بازه قرار می‌گیرد، گزینه «۳» است.



سوال ۷

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۲»: نمودار تابع f در فاصله $(0,1)$ زیر محور xها و مقادیر آن منفی است. پس در این فاصله $\sqrt{f(x)}$ تعریف نشده است.

گزینه «۳»: تابع f در $x = 2$ ناپیوسته است، پس $\frac{x+1}{\sqrt{f(x)}}$ هم ناپیوسته می‌شود.

گزینه «۴»: مقدار تابع f در $x = 3$ برابر صفر است. پس $y = \frac{x+1}{\sqrt{f(x)}}$ در $x = 3$ تعریف‌شده نیست و تابع ناپیوسته است.

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

تابع $y = \left[\frac{\sqrt{x}}{2}\right]$ در نقاط صحیح به فرم $x = 4k^2$ $(k \in Z)$، ناپیوسته است. یعنی در نقاط به طول ۴، ۱۶، ۳۶، ۶۴ و ... ناپیوسته است. اما از آنجا که تابع f، در $x = 4$ پیوسته است، طول نقاط ناپیوسته تابع به‌صورت زیر است:

$16, 36, 64, \ldots$

برای اینکه در بازه $(0, a)$، دو نقطه ناپیوسته داشته باشد، حداکثر مقدار a باید برابر ۶۴ باشد.
(دقت کنید که:

$$x \to 4^+ : \left[\frac{\sqrt{x}}{2}\right] = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (x^2 - 16) = 0$$

$$x \to 4^- : \left[\frac{\sqrt{x}}{2}\right] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} 0 = 0$$

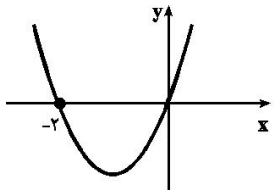
پس f در $x = 4$ پیوسته است.)

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

نمودار تابع $y = x^2 + 2x$ به‌صورت زیر است.



از نقطهٔ $x = -2$ هر چه در جهت منفی روی محور x ها پیش برویم، مقدار تابع بیشتر می‌شود. برای آنکه تابع $f(x) = \left[\frac{1}{4}[x^2 + 2x]\right]$ پیوسته باشد، مقدار عبارت $\frac{1}{4}[x^2 + 2x]$ باید بین دو عدد صحیح متوالی قرار بگیرد. می‌دانیم به ازای $x = -2$ مقدار $\frac{1}{4}[x^2 + 2x]$ برابر صفر می‌شود. بنابراین برای آنکه تابع f پیوسته باشد، باید داشته باشیم:

$$0 \le \frac{1}{4}[x^2 + 2x] < 1 \Rightarrow 0 \le [x^2 + 2x] < 4$$

کافی است شرط $[x^2 + 2x] < 4$ را بررسی کنیم:

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

در $x = -1 - \sqrt{5}$ مقدار $x^2 + 2x$ برابر ۴ می‌شود. با توجه به شکل برای آنکه $x^2 + 2x < 4$ باشد، باید $x > -1 - \sqrt{5}$ باشد. پس تابع f در بازهٔ $(-1 - \sqrt{5}, -2]$ پیوسته است.

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

تابع $y = [x]$ تنها در نقاط صحیح x ناپیوسته است، اما مقدار تابع $y = \sin \pi x$ در نقاط صحیح x برابر صفر است، بنابراین حد تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$ در نقاط صحیح x مانند مقدار آن همواره برابر صفر است، این یعنی تابع f روی R پیوسته است و هیچ نقطه ناپیوستگی ندارد.